



MINISTERUL EDUCAȚIEI

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 11.02.2022
CLASA a XI- a

Problema 1

Se consideră matricele $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietățile: $AB = A^2B^2 - (AB)^2$ și $\det B = 2023$.

- a) Arătați că A nu este inversabilă.
- b) Arătați că există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\det(A + xB) = \alpha x + \det B \cdot x^2$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$.
- c) Determinați $m \in \mathbb{R}^*$, știind că $\det(A + mB) - \det(B + mA) = 2023$.

Problema 2

Se consideră matricea $M = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$.

- a) Arătați că dacă matricea $X \in M_2(\mathbb{R})$ verifică relația $MX = XM$, atunci există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a + 2b \end{pmatrix}$.
- b) Determinați matricea $X \in M_2(\mathbb{R})$, știind că $X^{2023} = M$.

Problema 3

Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ și $a_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \sqrt{\cos 2x} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$, $n \geq 2$.

- a) Calculați a_1 , a_2 și a_n , $n \in \mathbb{N}^*$.
- b) Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{16} \sum_{k=1}^n \frac{(2k+1)}{a_k^2} \right)^{\ln n}$.

Problema 4

Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale cu proprietatea că $x_{n+1} = \frac{n(n+4)}{(n+1)(n+2)} \cdot x_n + \frac{6}{(n+1)(n+2)}$, $n \geq 1$.

Aflați valoarea lui x_1 pentru care șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent, iar pentru x_1 astfel determinat calculați limita $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1-x_n)}{x_n}$.

G.M.-B, Nr. 10/2021, Mihaela Berindeanu, București

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.